Παρασκευή 09/10/20

Δεσμευμένη (ή υπό συνθήκη πιθανότητα)

Υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες έχουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα ενός ενδεχομένου δεδομένης κάποιας σχετικής πληροφορίας, η οποία μεταβάλλει τον αρχικό δ.χ S του αρχικού πειράματος σε ένα νέο δ.χ έστω S_1.

π.χ)

Δύο διαδοχικές ρίψεις ενός ζαριού. Αν υποθέσουμε ότι στην πρώτη ήρθε 1, τότε με δεδομένο ότι στην δεύτερη ρίψη δεν θα έρθει 1 είναι $S_1=\{2,3,4,5,6\}$ και υπό αυτές τις συνθήκες η πιθανότητα οποιασδήποτε ένδειξης είναι 1/5 που είναι μεγαλύτερη σε σχέση με το 1/6 της πρώτης ρίψης. ■

Άρα η νέα πληροφορία μεταβάλλει το σύνολο των πιθανών αποτελεσμάτων (δ.χ) και κατά συνέπεια αυξάνει την πιθανότητα πραγματοποίησης των υπόλοιπων ενδεχομένων

Ορισμός: Έστω $(S,\mathcal{A},P)$ χώρος πιθανοτήτων και έστω $A,B \in \mathcal{A}$ με $P(B)>0$. Η δεσμευμένη πιθανότητα του A δοθέντος ότι έχει πραγματοποιηθεί το B συμβολίζεται με $P(A|B)$ και είναι

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{|A\cap B|/|S|}{|B|/|S|}$$

- Αν $A_1 \subseteq A_2$ τότε $P(A_1|B) \leq P(A_2|B)$

$P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B - P(A_1 \cap A_2|B$

Παράδειγμα 1: Ένα ζάρι ρίχνεται δυο φορές έστω
$A = \{$αποτ. 1ης ρίψης $= 3\}$, $B = \{$άθροισμα αποτελεσμ. $= 8\}$
Να υπολογισθεί $P(A|B)$

$A = \{(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6)\}$
$B = \{(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)\}$

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{1}{5}$$

Παράδειγμα 2:
Μια κάλπη περιέχει n διακεκριμένες μπάλες. Δυο μπάλες επιλέγονται η μια μετά την άλλη χωρίς επανάθεση.
Ποια η πιθανότητα να επιλεγεί η υπ' αριθμόν 1 σφαίρα στην δεύτερη επιλογή δοθέντος ότι δεν εκλέγεται στην πρώτη.

$A = \{$επιλέγεται η υπ' αριθμόν 1 στην 2η επιλογή$\}$
$B = \{$δεν εκλέγεται η υπ' αριθμόν 1 στην 1η επιλογή$\}$

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}}{\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{n-1}$$

Δεύτερος τρόπος:
Στην 2η επιλογή έχω $n-1$ μπάλες και θέλω τη μπάλα με τον αριθμό 1. $= \frac{1}{n-1}$ αφού στην πρώτη έχω επιλέξει μια διαφορ. του 1.

Παράδειγμα 3: Από τράπουλα 52 χαρτιών επιλέγονται 3.
Ποια η πιθανότητα να εκλεγούν δυο ακριβώς άσσοι δοθέντος ότι υπάρχουν (έχουν εκλεγεί) δυο ακριβώς ρήγες

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\binom{4}{2}\binom{46}{1}}{\binom{50}{3}} = 0{,}1408$$

Αν μας ενδιέφερε η $P(A) = \frac{\binom{4}{2} \times \binom{48}{3}}{\binom{52}{5}} = 0.0399$

<u>Παράδειγμα 4:</u> Εκλέγονται 5 χαρτιά από τράπουλα με 52 χαρτιά. Ποια η πιθανότητα να εκλεγούν δύο ακριβώς άσσοι δοθέντος ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας άσσος;

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα $A = \{2$ ακριβώς άσσοι$\}$
$B = \{$τουλάχιστον ένας άσσος$\}$
$A \cap B = A$.

Όταν βλέπω "τουλάχιστον" ή "το πολύ" $\Rightarrow P(A) = 1 - P(A^c)$.

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{1-P(B)} = \frac{\binom{4}{2}\binom{48}{3} / \binom{52}{3}}{1 - \frac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}}} = 0{,}1170$$

<u>Πολλαπλασιαστικός νόμος:</u>

Έστω $(S, \mathcal{A}, P)$ χώρος πιθανότητας. Τότε,
$$P(A\cap B) = P(A|B)\cdot P(B) = P(B|A)\cdot P(A).$$
$A, B \in \mathcal{A}$, $P(A), P(B) > 0$

<u>Ορισμός:</u>
Υποθέτουμε ότι $A_i \in \mathcal{A}$ και ότι $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0$ $n \geq 2$. Τότε,
$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)\,P(A_2|A_1)\,P(A_3|A_1 A_2)\ldots P(A_n|A_1 A_2 \ldots A_{n-1})$$

Scanned with CamScanner

Παρατηρούμε ότι $P(A_1)P(A_2|A_1)\dots P(A_n|A_1\dots A_{n-1}) =$
$= P(A_1)\dfrac{P(A_1\cap A_2)}{P(A_1)}\cdot\dfrac{P(A_1\cap A_2\cap A_3)}{P(A_1\cap A_2)}\dots\dfrac{P(A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_n)}{P(A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_{n-1})}$

$= P(A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_n)$

Αριθμήσιμη διαμέριση:

Η διαμέριση $\{B_1, B_2, \dots B_k\}$ του δειγματικού χώρου S για την οποία $B_i \subseteq S$, $B_i \cap B_j = \{\}$, $\bigcup_{i=1}^{k} B_i = S$

Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας:

Έστω $\{B_1, B_2 \dots B_n\}$ μια αριθμήσιμη διαμέριση του δειγματικού χώρου S και A ενδεχόμενο με $P(A)>0$
Τότε:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)$$

Εφαρμόζεται όταν η πραγματοποίηση ενός γεγονότος εξαρτάται από κάποια προηγούμενα βήματα

Παράδειγμα 1:

Μια κάλπη περιέχει m μαύρες και n άσπρες μπάλες. Μια σφαίρα εκλέγεται, το χρώμα της σημειώνεται και η σφαίρα τοποθετείται πάλι στην κάλπη μαζί με άλλες k του ιδίου χρώματος. Μια δεύτερη σφαίρα εκλέγεται.

1.) Ποια η πιθανότητα η δεύτερη σφαίρα να είναι άσπρη;

2.) Ποια η πιθανότητα οι δύο σφαίρες να είναι άσπρες;

Έχουμε $A = \{2^η$ μπάλα ασπρη$\}$. Η πραγματοποίηση του A εξαρτάται απο το χρώμα της $1^{ης}$. ~~Έστω~~

Εστω $B_1 = \{1^η$ μπαλα ασπρη$\}$, $B_2 = \{1^η$ μπαλα μαυρη$\}$.

Αρα $P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2)$

$P(B_1) = \frac{n}{m+n}$, $P(A|B_1) = \frac{n+k}{m+n+k}$.

$P(B_2) = \frac{m}{m+n}$, $P(A|B_2) = \frac{n}{m+n+k}$.

Αρα $P(A) = \frac{n+k}{(m+n+k)} \cdot \frac{n}{(m+n)} + \frac{m}{(m+n)} \cdot \frac{n}{m+n+k} = \frac{n(n+k)+m \cdot n}{(m+n)(m+n+k)}$

2) $P($και οι δυο μπαλες ασπρες$) = P(A \cap B_1) = P(A|B_1) \cdot P(B_1)$

Παράδειγμα 2: Δυο κάλπες περιέχουν: $1^η$ m_1 μαυρες και n_1 ασπρες. και $2^η$: m_2 μαυρες και n_2 ασπρες. Μια σφαιρα επιλεγεται απο την $1^η$ και τοποθετείται στην $2^η$. Μια σφαίρα επιλέγεται από την δεύτερη κάλπη.

1) Ποια η πιθανοτητα η $2^η$ σφαιρα να ειναι λευκη?

2) Ποια η πιθανότητα και οι δυο σφαίρες να είναι λευκές

1) $A = \{2^η$ μπαλα ασπρη$\}$, $B_1 = \{1^η$ ασπρη$\}$, $B_2 = \{1^η$ μαυρη$\}$.

$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) =$

$= \frac{n_2+1}{m_2+n_2+1} \cdot \frac{n_1}{m_1+n_1} + \frac{n_2}{m_2+n_2+1} \cdot \frac{m_1}{m_1+n_1}$

2) $P(A \cap B_1) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) = \frac{n_2+1}{m_2+n_2+1} \cdot \frac{n_1}{m_1+n_1}$.

Παράδειγμα 3:

Απο n κλειδιά το 1 μονο ανοιγει μια πορτα. Τα κλειδια δοκιμάζονται το ένα μετά το άλλο χωρίς επανάθεση. Ποια η πιθανότητα να ανοίξει η πορτα στην k δοκιμή;

Scanned with CamScanner

P(να ανοίξει η πόρτα στην κ δοκιμή) $= P(A_1' A_2' \dots A_{k-1}' A_k)$

$A_i = \{$να ανοίξει η πόρτα στην i δοκιμή$\}$.

Θέλω η πόρτα να μην ανοίξει στις πρώτες k-1 δοκιμές και να ανοίξει στην k δοκιμή.

P(να ανοίξει η πόρτα στην k δοκιμή) $= P(A_1')P(A_2'|A_1') \dots P(A_k|A_1' \dots A_{k-1}')$

$P(A_1') = \frac{(n-1)}{n}$, $P(A_2') = \frac{(n-2)}{(n-1)}$ ... $P(A_{k-1}') = \frac{n-k-1}{n-k}$

$P(A_k) = \frac{1}{n-k+1}$

P(να ανοίξει στην k δοκιμή) $= \frac{n-1}{n} \frac{n-2}{n-1} \dots \frac{1}{n-k+1} = \frac{1}{n}$

Θεώρημα Bayes:

Αν έχουμε μια ομάδα γεγονότων που

- η πραγματοποίηση του κάθε ενός από αυτά εξαρτάται από ενδιάμεσα βήματα
- και θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα πραγματοποίησης ενός από αυτά, σε σχέση με όλα τα άλλα ενδεχόμενα

τότε χρησιμοποιούμε το Θεώρημα Bayes:

Θεώρημα Bayes:

Έστω $\{B_1, B_2, \dots B_n\}$ μια αριθμήσιμη διαμέριση του δειγματικού χώρου S και A ενδεχόμενο με $P(A)>0$ τότε

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)}$$

Απόδειξη:

$$A = A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i)$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A\cap B_i) \overset{(1)}{=} \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i)$$

και άρα $$P(B_i|A) = \frac{P(A\cap B_i)}{P(A)} = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)}$$

Παράδειγμα 1:

Μια κάλπη έχει m μαύρες και n άσπρες μπάλες. Μια μπάλα επιλέγεται, εξετάζεται το χρώμα της και επανατοποθετείται στην κάλπη μαζί με τις υπόλοιπες κ μπάλες του ίδιου χρώματος. Μια μπάλα ξαναεπιλέγεται. Να υπολογιστή η πιθανότητα η δεύτερη μπάλα να είναι άσπρη δεδομένου ότι η πρώτη είναι άσπρη.

$$P(1\eta \text{ σφαίρα } A \mid 2\eta \text{ σφαίρα } A) = \frac{P(2\eta\ A \mid 1\eta\ A)\cdot P(1\eta\ A)}{P(2\eta\ A \mid 1\eta\ A)\cdot P(1\eta\ A) + P(2\eta\ A \mid 1\eta\ M)P(1\eta\ M)}$$

$$= \frac{\frac{m+k}{m+n+k}\,\frac{n}{m+n}}{\frac{m+k}{m+n+k}\cdot\frac{n}{m+n} + \frac{n}{m+n+k}\,\frac{m}{m+n}} = \frac{n(m+k)}{n(m+k)+m\cdot n}.$$

Παράδειγμα 2:

Δυο κάλπες περιέχουν, η πρώτη m_1 Μ και n_1 Α. και m_2 Μ και n_2 Α η δεύτερη. Μια μπάλα επιλέγεται από την πρώτη κάλπη και τοποθετείται στη 2η. Μια μπάλα επιλέγεται στην 2η. Ποια η πιθανότητα η πρώτη μπάλα να είναι άσπρη δεδομένου ότι η 2η είναι μαύρη.

Λύση:

Ξέρω το τελικό αποτέλεσμα και θέλω την πιθανότητα ενός προηγούμενου βήματος, άρα εφαρμόζω Θεώρημα Bayes

$$P(1\eta\ A \mid 2\eta\ M) = \frac{n_1\cdot m_2}{n_1 m_2 + m_1(m_2+1)}$$

Άσκηση 1: Ένα στα χίλια άτομα ενός πληθυσμού πάσχει από κάποια σοβαρή ασθένεια. Η εξέταση που γίνεται δίνει λάθος διάγνωση στο 1% των περιπτώσεων, αν το άτομο που υποβάλλεται στην εξέταση όντως πάσχει και στο 2% των περιπτώσεων αν δεν πάσχει. Ποια η πιθανότητα να προκύψει θετική η εξέταση σε κάποιο τυχαίο άνθρωπο; Αν για κάποιο άνθρωπο του πληθυσμού η εξέταση είναι θετική ποια η πιθανότητα να πάσχει πράγματι από την ασθένεια.

Έστω S το ενδεχόμενο το άτομο να πάσχει από την ασθένεια και Θ, A τα ενδεχόμενα εμφάνισης θετικού/αρνητικού τεστ.

$P(S)=0{,}001, \quad P(A|S)=0{,}01, \quad P(\Theta|S')=0{,}02$

$P(S')=0{,}999, \quad P(\Theta|S)=0{,}99, \quad P(A|S')=0{,}98$

Από Θ.Ο.Π.

$$P(\Theta)=P(\Theta|S)P(S)+P(\Theta|S')P(S')=0{,}99\cdot 0{,}001+0.02\cdot 0{,}999=$$
$$=0{,}02097$$

Από τον τύπο του Bayes θα ισχύει

$$P(S|\Theta)=\frac{P(\Theta|S)P(S)}{P(\Theta)}=0{,}047$$

Άσκηση 2: Ένα δοχείο έχει 6 κοκ και 4 πράσινες σφαίρες ενώ το 2ο δοχείο περιέχει 7 κοκ και 3 πράσινες. Μια σφαίρα διαλέγεται στην τύχη από το 1ο δοχείο και τοποθετείται στο 2ο. Έπειτα μια σφαίρα διαλέγεται από το 2ο. 1) Ποια η πιθανότητα να διαλεχτεί κοκ. στο 1ο, κόκκινη στο 2ο
2) Ποια η πιθανότητα στο τέλος του πειράματος να μην έχει αλλάξει η σύνθεση των δοχείων;

Έστω K_i, Π_i, η πιθανότητα επιλογής Κόκκινης/Πράσινης σφαίρας στο i δοχείο, $i=1,2$

1) $P(K_1\cap K_2)=P(K_2|K_1)\cdot P(K_1)=\frac{8}{11}\cdot\frac{6}{10}$

2) $P((K_1\cap K_2)\cup(\Pi_1\cap\Pi_2))=P(K_1\cap K_2)+P(\Pi_1\cap\Pi_2)=$

$=P(K_2|K_1)P(K_1)+P(\Pi_2|\Pi_1)P(\Pi_1)=\frac{8}{11}\cdot\frac{6}{10}+\frac{4}{11}\cdot\frac{4}{10}$

Ασκηση 3:

Περίπου 14% των ανδρών και το 2% των γυναικών πασχουν από αχρωματοψία. Ποια η πιθανότητα ενα ατομο που διαλέγεται στην τύχη απο μια αίθουσα να πασχει απο αχρωματοψία αν στην αίθουσα υπάρχουν i) 40 ανδρες και 70 γυναικες ii) ισο πλήθος ανδρων και γυναικών iii) διπλάσιοι άντρες από γυναικες.

Εστω Β το ενδεχόμενο να πασχει απο αχρωματοψία και Α,Γ τα ενδεχόμενα να είναι άντρας ή γυναικα.

i) $P(B) = P(B|A)\cdot P(A) + P(B|\Gamma)\cdot P(\Gamma) = 0{,}14\cdot\frac{40}{110} + 0{,}02\cdot\frac{70}{110} = 0{,}063$

ii) $P(B) = P(B|A)\cdot P(A) + P(B|\Gamma)\cdot P(\Gamma) = 0{,}14\cdot\frac{1}{2} + 0{,}02\cdot\frac{1}{2} = 0{,}08$

iii) $P(B) = 0{,}14\cdot\frac{2}{3} + 0{,}02\cdot\frac{1}{3} = 0{,}1$

Ασκηση 4:

Στην αρχή ενός έτους διατυπώνονται 3 οικονομικές θεωρίες για την πιθανή εξέλιξη της οικονομίας, οι οποίες φαίνονται ισοπίθανες. Στο τελος του έτους η ανάλυση έδειξε ότι αν η πρωτη θεωρία ήταν αληθινή η οικονομία είχε 0,6 πιθ. να καταλήξει στην παρουσα κατασταση οι αντιστοιχες πιθανότητες για την $2^{\text{η}}$, $3^{\text{η}}$ είναι 0,4 και 0,2. Να υπολογιστή η πιθανότητα με την οποία η παρούσα κατασταση της οικονομίας μπορεί να θεωρηθεί αποτέλεσμα της θεωρίας $i = 1,2,3$.

Εστω $A_i = \{$Η θεωρία i είναι η σωστή$\}$.

Ε η οικονομία βρίσκεται στην παρουσα κατασταση.

από τυπο του Bayes εχουμε , $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}$

$$P(A_1|E) = \frac{P(E|A_1)P(A_1)}{P(E|A_1)P(A_1) + P(E|A_2)\cdot P(A_2) + P(E|A_3)\cdot P(A_3)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{10}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{10} + \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{10} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{10}} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}.$$

$P(A_2|E) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

$P(A_3|E) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

Άσκηση 5:

Από μια τράπουλα 52 φύλλων τραβάμε 5 χαρτιά χωρίς επανάθεση. Ποια η πιθανότητα: 1º, σπαθί, 2º σπαθί, 3º σπαθί, 4º καρό, 5º καρό.

Έστω $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, K_4, K_5$ τα επιμέρους αποτελέσματα. Τότε

$P(\Sigma_1 \Sigma_2 \Sigma_3 K_4 K_5) =$

$P(\Sigma_1) \cdot P(\Sigma_2|\Sigma_1) \cdot P(\Sigma_3|\Sigma_1\Sigma_2) \cdot P(K_4|\Sigma_1\Sigma_2\Sigma_3) \cdot P(K_5|\Sigma_1\Sigma_2\Sigma_3 K_4)$

$= \frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} \cdot \frac{11}{50} \cdot \frac{13}{49} \cdot \frac{12}{48} = 0{,}0009.$

Αν δεν μας ενδιέφερε η σειρά με την οποία θα βγουν τα φύλλα τότε $P(3\Sigma, 2K) = \frac{\binom{13}{3}\binom{13}{2}}{\binom{52}{5}}$

Άσκηση 6:

Το κουτί A περιέχει 5M και 4A. Το κουτί B περιέχει 2M και 6A. Δυο μπάλες μεταφέρονται από το A στο B και στη συνέχεια μια μπάλα εξάγεται από το B.
Ποια η πιθανότητα η μπάλα που βγήκε να είναι άσπρη

$P(A) = P(A|2A) \cdot P(2A) + P(A|1A,1M) P(1A,1M) + P(A|2M) \cdot P(2M)$

$P(2A) = \frac{\binom{5}{0}\binom{4}{2}}{\binom{9}{2}}$, $P(1A,1M) = \frac{\binom{5}{1}\binom{4}{1}}{\binom{9}{2}}$, $P(2M) = \frac{\binom{5}{2}\binom{4}{0}}{\binom{9}{2}}$

Scanned with CamScanner

Άσκηση 7: Ένα άτομο έχει πιθανότητες 1/6, 1/2, 1/3 να αποκτήσει 0, 1, 2 παιδιά. Οι πιθανότητες ισχύουν για κάθε ένα από τα παιδιά του.

1) Ποια η πιθανότητα το άτομο αυτό να μην αποκτήσει κανένα εγγόνι

2) Δεδομένου ότι δεν απέκτησε εγγόνι ποια η πιθανότητα να έχει 2 παιδιά

$P(0\ \text{εγγόνια}) = P(0\ \text{παιδιά}) + P(0\ \text{εγγ.} \mid 1\ \text{παιδί})P(1\ \text{παιδί}) + P(0\ \text{εγγ} \mid 2\ \text{παιδιά}) \cdot P(2\ \text{παιδιά}).$

$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3}$

Για το δεύτερο ερώτημα πρώτα συμβολίζουμε με iΠ το ενδεχόμενο {i παιδιά} και (jE) το ενδεχόμενο {j εγγόνια}. εφαρμόζουμε Bayes

$$P(2Π \mid 0E) = \frac{P(0E \mid 2Π) \cdot P(2Π)}{P(0Π) + P(0E \mid 1Π)P(1Π) + P(0E \mid 2Π)P(2Π)}$$

Άσκηση 8:

Ένα άτομο επιλέγει στην τύχη ένα από τα δύο νομίσματα A, B. Το A έχει πιθ. 3/4 να φέρει K ενώ το B 1/4. Το άτομο ρίχνει το εκλεγέν νόμισμα 2 φορές

1) Ποια η πιθανότητα η μια φορά να είναι κορώνα;

2) Ποια η πιθανότητα για 2 κορώνες.

$P(1\ \text{κορώνα}) = 2P(1K, 1Γ \mid A) \cdot P(A) + 2P(1K, 1Γ \mid B)P(B) =$

$= \cancel{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} + \cancel{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

$P(2K) = P(2K \mid A) \cdot P(A) + P(2K \mid B)P(B) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}$

$= \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$